

DESEMPENHO DO GRÁFICO DE MÉDIAS QUANDO CAUSAS NÃO ESPECIAIS AFETAM A ESTABILIDADE DA VARIÁVEL X.

Ricardo Simoni de Freitas, Fernando Antônio Elias Claro, Antônio Fernando Branco Costa. – Inter-áreas - Engenharia de Produção mecânica – Departamento de Produção – Faculdade de Engenharia – Campus de Guaratinguetá.

Em processos convencionais é possível a presença de fatores geradores do comportamento não aleatórios dos dados, como resultado de efeitos sazonais, fadiga do operador, diferentes métodos de medição ou procedimentos operacionais distintos entre turnos (AMJED & JAY, 1996), sendo evidente que a remoção destes padrões cíclicos contribui para maior produtividade do processo.

Monitorando-se as características de qualidade de processos discretos, especialmente os automatizados, com relativa frequência, verifica-se a existência de modelos cíclicos no gráfico de controle. Estes modelos são peculiares aos dados que exibem autocorrelação (VANDER WEIL, 1996), ou seja, um padrão que pode ser sintoma de um problema a ser tratado, segundo um modelo autoregressivo ou, alternativamente, de um comportamento normal que não se deseja, ou não se pode remover (GILBERT *et al*, 1997; FALTIN *et al*, 1997). Assim, necessário o implemento de alterações em parâmetros da carta de controle (RUNGER & WILLEMAIN, 1996; YANG & HANCOCK, 1990; COSTA *et al*, 2005; MONTGOMERY, 2004) de modo que apenas as verdadeiras causas especiais sejam efetivamente sinalizadas no processo.

A elaboração de gráficos de controle independentes do modelo (“model-free”), para dados autocorrelacionados tem obtido sucesso. Guimarães & Epprecht (2000) reportam um estudo realizado, tendo como característica de qualidade a pressão de pneus, onde o emprego de cartas \bar{X} e R gerava um número excessivo de alarmes falsos, devido a dependência dos dados. A solução aplicada consistiu em revisar os limites de controle com base na variabilidade total do processo, segundo metodologia sugerida por Yang & Hancock (1989), a qual mantém a simplicidade do uso do instrumento.

Nos dois cenários investigados neste artigo a média do processo está sujeita a uma instabilidade que a faz “vaguear” em torno de seu valor alvo ao longo do tempo, não como reflexo de dependência dos dados, nem da presença de uma causa especial, mas sim como comportamento inerente ao processo. No primeiro cenário, o movimento aleatório da média segue uma distribuição normal e, no segundo, uma distribuição uniforme. Assim, os efeitos da “flutuação” que governam as médias das observações, sobre a eficiência da carta de controle são medidos pelo Número Médio de Amostras até o Sinal (NMA).

Para um processo cuja média é variável, segundo uma distribuição normal, a perturbação resultante das causas não especiais que geram instabilidades na média do processo, será descrita por uma variável aleatória Y com distribuição normal de média zero e desvio padrão $\sigma_p = \Delta\sigma_0$, sendo $\Delta > 0$ e σ_0 o desvio padrão da característica de qualidade X , de itens advindos de um processo cuja média é estável e está ajustada no valor alvo μ_0 . Assim $\bar{X} \approx N(\mu_0; \sigma_0/\sqrt{n})$ e $Y \approx N(0; \Delta\sigma_0)$, sendo n o tamanho das amostras e $\sigma_p = \sqrt{(\Delta^2 + \frac{1}{n})} \sigma_0$. Com as causas que desestabilizam a média do processo, a distribuição de Z , que representa a média das amostras, será:

$$Z = \bar{X} + Y \approx N(\mu_0; \sigma_p) \quad [1]$$

Após a ocorrência da causa especial, que desloca, em definitivo, a média do processo para $\mu_0 \pm \delta_p \sigma_p$. Sendo $\delta_n = \delta_p \sqrt{\frac{1}{n} + \Delta^2}$, tem-se que:

$$Z \approx N(\mu_0 \pm \delta_n \sigma_0; \sigma_p) \quad [2]$$

$$\text{Para } n=1: \quad \delta_p = \frac{\delta_1}{\sqrt{\Delta^2 + 1}} \quad [3]$$

$$\text{e para um tamanho de amostra "n" qualquer: } \delta_p = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\Delta^2 n + 1}} \delta_n \quad [4]$$

$$\text{Igualando as equações [3] e [4] segue que: } \delta_n = \sqrt{\frac{\Delta^2 n + 1}{\Delta^2 + 1}} \cdot \frac{\delta_1}{\sqrt{n}} \quad [5]$$

Tabela 1 – Valores de δ_n

N	Δ										
	2.00	1.50	1.00	0.70	0.50	0.40	0.30	0.25	0.20	0.10	0
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	0.949	0.920	0.866	0.815	0.775	0.754	0.736	0.728	0.721	0.711	0.707
3	0.931	0.892	0.816	0.743	0.683	0.652	0.623	0.610	0.599	0.583	0.577
4	0.922	0.877	0.791	0.705	0.632	0.595	0.559	0.542	0.528	0.507	0.500
5	0.917	0.868	0.775	0.681	0.600	0.557	0.516	0.497	0.480	0.456	0.447
6	0.913	0.862	0.764	0.664	0.577	0.531	0.485	0.464	0.446	0.418	0.408
7	0.910	0.858	0.756	0.652	0.561	0.511	0.462	0.440	0.419	0.389	0.378
8	0.908	0.855	0.750	0.642	0.548	0.496	0.444	0.420	0.398	0.366	0.354

A Tabela 1 serve para avaliar o efeito de n e de Δ no desempenho do gráfico de controle. O parâmetro Δ mede a magnitude da perturbação da causa não especial, na estabilidade da média do processo. Para $\Delta = 0$, a média μ do processo é fixa e igual a μ_0 , para $\Delta = 1,00$, μ é uma variável aleatória com distribuição normal de média μ_0 e desvio padrão σ_0 . A última coluna da Tabela 1 trata do caso tradicional, em que a média do processo não está sujeita a oscilações, pois $\Delta = 0$. Para $\Delta = 0$, $\delta_1 = 1,00$ e $\delta_4 = 0,50$, portanto o número médio de amostras (NMA), unitárias necessárias para se detectar deslocamentos da média de L desvios padrão, $L \neq 0$, é igual ao número médio de amostras de tamanho quatro necessárias para se detectar deslocamento da média de $L/2$ desvios padrão. Se a média do processo está sujeita a oscilações severas ($\Delta = 2,00$), a adoção de amostras de tamanho unitário ou de tamanho quatro, levam a NMAs muito próximos, pois agora $\delta_4 = 0,922$.

Neste caso, o gráfico de \bar{X} é a melhor opção. Para $\Delta = 0,40$, $\delta_1 = 1,00$ e $\delta_4 = 0,595$, assim o número médio de amostras (NMA) unitárias necessárias para se detectar deslocamentos da média de L desvios padrão, $L \neq 0$, é igual ao número médio de amostras de tamanho quatro necessárias para se detectar deslocamento da média de $(3/5)L$ desvios padrão.

Tabela 2 - Valores do NMA para diversos (n ; Δ - distribuição normal)

N	Δ										
	2.00	1.50	1.00	0.70	0.50	0.40	0.30	0.25	0.20	0.10	0
1	43,89	43,89	43,89	43,89	43,89	43,89	43,89	43,89	43,89	43,89	43,89
2	38,67	35,84	30,76	26,24	22,87	21,26	19,83	19,22	18,70	17,98	17,73
3	36,92	33,13	26,36	20,41	16,06	14,04	12,28	11,54	10,92	10,06	9,76
4	36,04	31,77	24,17	17,56	12,83	10,67	8,83	8,08	7,45	6,59	6,30
5	35,51	30,96	22,87	15,89	10,96	8,76	6,93	6,19	5,58	4,77	4,50
6	35,16	30,42	22,00	14,79	9,76	7,56	5,75	5,04	4,45	3,69	3,44
7	34,91	30,03	21,38	14,01	8,93	6,73	4,96	4,27	3,71	3,00	2,77
8	34,72	29,74	20,92	13,43	8,32	6,14	4,40	3,73	3,20	2,53	2,32

A Tabela 2 foi construída considerando gráficos de controle com limites de “3-sigma”, isto é, $\mu_0 \pm 3,00\sigma_p$. Para $\Delta = 1,00$ e $\delta_6 = 1,00$, que corresponde a um $\delta_1 = 1/0,764 = 1,31$ (vide Tabela 1), o poder de detecção é dado por:

$$Pd = \Pr[z > 3,00 - 1,31 | z \sim N(0,1)] + \Pr[z < -3,00 - 1,31 | z \sim N(0,1)] \approx 91/2000$$

E o NMA, que é o inverso do poder, é igual a 22,00. Quando a média do processo não oscila ($\Delta = 0$), o NMA é de 3,44; portanto muito menor. A Figura 1 apresenta, para $\Delta = 0$ e $\Delta = 1,00$, a probabilidade P_M de que após a inspeção das primeiras M amostras a causa especial (que desloca a média do processo de um desvio padrão, $\delta_6 = 1,00$) ainda não tenha sido detectada. Para $M=6$ e $\Delta = 1,00$, $P_M > 75\%$, enquanto que para $\Delta = 0$ $P_M < 15\%$.

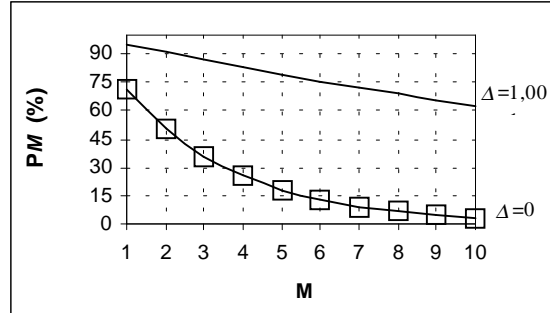


Figura 1 - Probabilidade P_M de não-detecção

Para um processo em que média é variável segundo uma distribuição uniforme, a perturbação resultante das causas não especiais que geram instabilidades na média do processo, será descrita por um variável aleatório U com distribuição uniforme de média zero e desvio padrão $\sigma_U = \Delta\sigma_0$, sendo $\Delta > 0$ e σ_0 o desvio padrão da característica de qualidade X, de itens advindos de um processo cuja média é estável e está ajustada no valor alvo μ_0 . Assim

$$\bar{X} \approx N(\mu_0; \sigma_0 / \sqrt{n}) \text{ e } U \approx \text{Uniforme}[0, \sigma_U] \text{ onde } \sigma_U = \frac{(b-a)}{\sqrt{12}} \text{ com } b = -a > 0. \text{ Com as causas}$$

que desestabilizam a média do processo, e sendo $\sigma_p = \sqrt{\Delta^2 + \frac{1}{n}} \sigma_0$. A distribuição de Z, que representa a média das amostras é:

$$Z = \bar{X} + U \approx \text{Dist}(\mu_0; \sigma_p) \quad [6]$$

Como a distribuição $\text{Dist}(\mu_0; \sigma_p)$ não é conhecida, para se avaliar o desempenho do gráfico de controle recorreu-se a simulações. Um programa em linguagem C++ ® foi elaborado para a obtenção do número de amostras até o sinal de 10.000 simulações. Com a média do processo centrada no alvo μ_0 , e $\sigma_p = 0,764$ (resultante da combinação: $\sigma_0 = 1,00$, $n=4$, e $\sigma_U = \sqrt{1/3}$) obteve-se para os limites de “3-sigma”, isto é $\mu_0 \pm 3,00\sigma_p = \mu_0 \pm 2,29$, um número médio de amostra até o sinal próximo de 1230; bem maior que o NMA de 370,4 que se obtém quando a média do processo permanece fixa (sem oscilar) no valor alvo μ_0 . Deste modo, a adoção de limites de “3-sigma”, quando há causas não especiais que fazem a média do processo oscilar, leva a um risco alfa menor que o usual de 0,0027. Para se obter um NMA de 370,4 foi preciso estreitar os limites do gráfico de controle para $\mu_0 \pm 2,09$. A Tabela 3 foi construída para $n=4$, e limites de controle que para $\mu = \mu_0$ levam a um NMA de 370,4. Após a ocorrência da causa especial, a média do processo se desloca em definitivo para $\mu_0 \pm \delta\sigma_0$. Os NMAs da Tabela 3, para $\delta \neq 0$, também foram obtidos por simulação. Os valores em negrito, nas Tabelas 2 e 3, são comparáveis, pois correspondem ao caso em que $n=4$, e $\Delta = 0; 0,25$,

0,50, 1,0 e 2,0. Desta comparação conclui-se que, independente da distribuição da variável que descreve a instabilidade da média do processo, os NMAs serão da mesma ordem de grandeza.

Tabela 3 - Valores do NMA para diversos (n; Δ -distribuição uniforme)

Parâmetros da Distribuição Uniforme e da Carta de Controle				Número médio de amostras até o sinal (NMA)							
				Deslocamento da média (δ)							
Δ	σ_n	b = -a	LC	0	0,5	0,75	1,0	1,25	1,50	1,75	2,00
0,00	0,500	0,000	$\pm 1,500$	370,4	43,5	14,9	6,3	3,2	2,0	1,5	1,2
0,25	0,312	0,433	$\pm 1,656$	370,4	54,2	20,0	8,5	4,4	2,6	1,8	1,4
0,50	0,707	0,866	$\pm 1,961$	370,4	72,0	28,2	12,8	6,9	4,0	2,8	2,0
1,00	1,118	1,732	$\pm 2,680$	370,4	106,9	45,2	21,5	11,8	7,4	5,2	3,8
2,00	2,061	3,464	$\pm 4,204$	370,4	240,1	95,4	44,5	23,8	14,6	10,0	7,4

Com os resultados obtidos, conclui-se que as hipóteses fundamentais para o uso de cartas de controle, como instrumento de monitoração de processos, são a independência e normalidade dos dados.

Entretanto, observou-se que quando o parâmetro de posição da distribuição dos dados oscila aleatoriamente em torno de um valor alvo, ainda que as características fundamentais estejam presentes, há sensível deterioração na eficiência da carta de controle. A perda da capacidade de detecção é diretamente proporcional a magnitude da oscilação aleatória.

Para oscilações de grande magnitude o gráfico de controle das observações individuais é a melhor opção e quando as perturbações forem menores, o aumento do número de amostras nos subgrupos contribui para recuperar, ainda que parcial, o poder de detecção da carta de controle.

Referências Bibliográficas

- AL-GHANIM, A.; JORDAN, J. (1996) – Automated process monitoring using statistical pattern recognition techniques on X-bar control charts. *Journal of Quality Maintenance Engineering*. Vol. 2, n. 1, p. 25 - 32.
- COSTA, A. F. C.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. (2005) - *Controle Estatístico de Qualidade*. Editora Atlas. 2ª Edição. São Paulo.
- ENGLISH, J.R.; LEE, S.-C.; MARTIN, T.W.; TILMON, C. (2000) - Detecting changes in autoregressive processes with \bar{X} and EWMA charts. *IIE Transactions*, Vol. 32, p.1103-1113.
- GILBERT, K. C.; KIRBY, K.; HILD, C. R. (1997) – Charting autocorrelated data: guidelines for practitioners. *Quality Engineering*. Vol. 9, n. 3; p. 367 – 382.
- FALTIN, F. W.; MASTRANGELO, C. M.; RUNGER, G. C.; RYAN, T. (1997) – Considerations in the monitoring of autocorrelated and independent data. *Journal of Quality Technology*; Vol.29,n.2; p.131-133.
- GUIMARÃES, N. R.; EPPRECHT, E.K. (2000) – Uma proposta prática para o controle estatístico de processos com correlação; em ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 2000.
- LU, C.-W.; REYNOLDS JR., M. R. (1999) – Control charts for monitoring the mean and variance of autocorrelated processes, *Journal of Quality Technology*, Vol. 31, n. 3, p. 259 - 274.
- MONTGOMERY, D. C. (2004) – *Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade*. Editora LTC. 4ª Edição.
- RUNGER, G. C. & WILLEMAIN, T. R. (1996) - Batch-means control charts for autocorrelated data. *IIE Transactions*; Vol. 28, n. 6; p. 483 - 487.
- VANDER WEIL, S. A. (1996) – Monitoring processes that wander using moving average models. *Technometrics*, Vol. 38, p. 139 - 151.
- YANG, K. & HANCOCK, W. M. (1990) – Statistical Quality Control for Correlated Samples. *International Journal of Production Research*, Vol. 28, n.3, p. 595 - 608.